BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2014-2015
MÔN THI: TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)
Thời gian: 150 phút

Câu I: (2 điểm) Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1$

b) $\left(x+\sqrt{x}+1\right)^2=2x^2-30x+2$

Câu II: (2 điểm)

a) Có hay không số nguyên tố p thỏa mãn $8p-1$ và $8p+1$ cũng là số nguyên tố? Giải thích.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho: $3^x-2^y=1$

Câu III: (2 điểm)

a) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a+b=2$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2\le a^4+b^4$

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{3}{2}$$

Câu IV: (1 điểm)

Cho ΔABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F. Gọi (d_1) là đường thẳng qua D và vuông góc với BC, (d_2) là đường thẳng qua E và vuông góc với CA, (d_3) là đường thẳng qua F và vuông góc với AB. Chứng minh rằng: $(d_1);(d_2);(d_3)$ đồng quy khi và chỉ khi có đẳng thức sau:

$$\left(DB^2-DC^2\right)+\left(EC^2-EA^2\right)+\left(FA^2-FB^2\right)=0$$

Câu V: (2 điểm)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E là điểm trên cung nhỏ AB. Gọi H, K, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên AC, CD, AE, DE. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, HK.

a) Chứng minh rằng: AD, PQ, HK đồng quy.

b) Chứng minh rằng: $MN\perp NB$

Câu VI: (1 điểm)

Cho một đa giác đều 50 đỉnh. Người ta ghi lên mỗi đỉnh của đa giác 1 hoặc hai số. Biết rằng có 20 đỉnh ghi số 1, 30 đỉnh ghi số 2 và các số trên 3 đỉnh liên tiếp bất kỳ không đồng thời bằng nhau. Hãy tính tổng của tất các tích ba số trên 3 đỉnh liên tiếp của đa giác trên.

HẾT

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP.HCM

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2014-2014
MÔN THI: TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)
Thời gian: 150 phút

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I: (2 điểm) Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1$

Điều kiện: $x\ge\frac{-1}{2}$

$\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1\ \sqrt{3x+4}=1+\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(1+\sqrt{2x+1}\right)^2$

$\Leftrightarrow 3x+4=1+2\sqrt{2x+1}+2x+1\Leftrightarrow x+2=2\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow(x+2)^2=4(2x+1)$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4=8x+4\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=0\end{array}\right.(\text{nhận})$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\{4;0\}$

b) $\left(x+\sqrt{x}+1\right)^2=2x^2-30x+2$

Điều kiện: $x\ge0$

$\left(x+\sqrt{x}+1\right)^2=2x^2-30x+2\Leftrightarrow\left(x+1+\sqrt{x}\right)^2=2\left(x^2+2x+1\right)-34x$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+2\sqrt{x}(x+1)+x=2(x+1)^2-34x\Leftrightarrow(x+1)^2-35x-2\sqrt{x}(x+1)=0$

$\Leftrightarrow(x+1)^2-7\sqrt{x}(x+1)+5\sqrt{x}(x+1)-35x=0\Leftrightarrow(x+1)\left(x+1-7\sqrt{x}\right)+5\sqrt{x}\left(x+1-7\sqrt{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow x+1-7\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x-7\sqrt{x}+\frac{49}{4}=\frac{45}{4}\ \Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-\frac{7}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\\\sqrt{x}-\frac{7}{2}=\frac{-3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{47+21\sqrt{5}}{2}(\text{nhận})\\x=\frac{47-21\sqrt{5}}{2}(\text{nhận})\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\frac{47+21\sqrt{5}}{2};\frac{47-21\sqrt{5}}{2}\right\}$

Câu II: (2 điểm)

a) Có hay không số nguyên tố p thỏa mãn $8p-1$ và $8p+1$ cũng là số nguyên tố? Giải thích.

$8p-1;8p;8p+1$ là ba số nguyên liên tiếp, nên có một số chia hết cho 3.

Mà $8p-1;8p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên là số không chia hết cho 3.

Nên $(8p)\vdots3$. Nhưng $ƯCLN(8;3)=1$. Vậy $p\vdots3$. Mặt khác p nguyên tố nên p = 3.

$\Rightarrow 8p+1=25$ là hợp số.

Vậy không có số nguyên tố p thỏa mãn $8p-1;8p+1$ là các số nguyên tố.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho: $3^x-2^y=1$

Ta có: $3^x - 2^y = 1\ 3^x - 1 = 2^y\ (*)$

Nếu x = 2k $\left(k \in N^*\right)$. Từ (*) ta có : $\left(3^k + 1\right)\left(3^k - 1\right) = 2^y$

Do đó : $\begin{cases} 3^k + 1 = 2^a \\ 3^k - 1 = 2^b \end{cases}$ trong đó $a, b \in N$ và $a > b$

Ta có : $2^a - 2^b = 2 \Leftrightarrow 2^b\left(2^{a-b} - 1\right) = 2$. Nên $\begin{cases} 2^{a-b} - 1 = 1 \\ 2^b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{a-1} = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^k + 1 = 2 \\ 3^k - 1 = 2^1 \end{cases}$$

Ta có : $3^k = 3^1 \Leftrightarrow k = 1$. Khi đó x = 2. Từ (*) ta có : $2^y = 3^2 - 1 \Leftrightarrow 2^y = 2^3 \Leftrightarrow y = 3$

Nếu $x = 2k + 1\left(k \in N\right)$

Ta có : $3^x - 1 = 3\left(3^{2k} - 1\right) + 2 = 3\left(9^k - 1^k\right) + 2$ chia cho 8 dư 2 $\left(\text{vì } \left(9^k - 1^k\right) \vdots \left(9 - 1\right)\right)$

$\Rightarrow 2^y$ chia cho 8 dư 2 $\Rightarrow 2^y = 2 \Rightarrow y = 1$

Ta có : $3^x - 1 = 2^1 \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ cần tìm là : $\left(2;3\right);\left(1;1\right)$

<u>Câu III:</u> (2 điểm)

a) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \le a^4 + b^4$

Ta có : $\left(a + b\right)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right)$. Tương tự : $\left(a^2 + b^2\right)^2 \le 2\left(a^4 + b^4\right)$

Ta có : $\left(a + b\right)^2\left(a^2 + b^2\right)^2 \le \left(a^2 + b^2\right)\left(a^4 + b^4\right)$

Mà $a + b = 2\left(gt\right)$. Nên $\left(a + b\right)^2 = 4$

Do vậy, ta có : $a^2 + b^2 \le a^4 + b^4$

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \le \frac{3}{2}$$

Vì $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$ và áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(x + y\right)\left(x + z\right)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + xz + xy + yz}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z}\right)$$

Do đó: $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x + y} + \frac{x}{x + z}\right)\left(1\right)$

Chứng minh tương tự cũng có:

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x + y} + \frac{y}{y + z}\right)\left(2\right)\ ;\ \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y + z} + \frac{z}{x + z}\right)\left(3\right)$$

Từ (1); (2); (3) ta có:

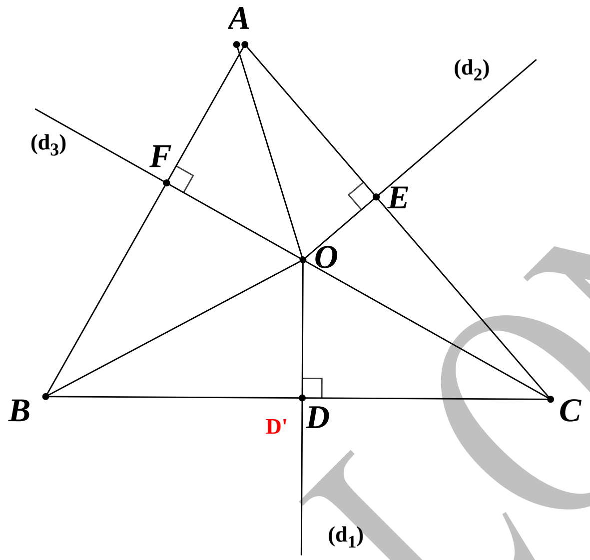
$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x + y} + \frac{y}{x + y} + \frac{x}{x + z} + \frac{z}{x + z} + \frac{z}{y + z} + \frac{y}{y + z}\right)$$

Vậy $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} \le \frac{3}{2}$

Câu IV: **(1 điểm)**

Cho ΔABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm D, E, F. Gọi (d_1) là đường thẳng qua D và vuông góc với BC, (d_2) là đường thẳng qua E và vuông góc với CA, (d_3) là đường thẳng qua F và vuông góc với AB. Chứng minh rằng: $(d_1);(d_2);(d_3)$ đồng quy khi và chỉ khi có đẳng thức sau:

$$\left(DB^2-DC^2\right)+\left(EC^2-EA^2\right)+\left(FA^2-FB^2\right)=0$$



a) Thuận: Giả sử $(d_1);(d_2);(d_3)$ đồng quy tại O

ΔOBD vuông tại D, ΔOCD vuông tại D nên theo định lý Pytago, ta có:

$$\begin{cases} DB^2+OD^2=OB^2 \\ DC^2+OD^2=OC^2 \end{cases} \Rightarrow DB^2-DC^2=OB^2-OC^2\,(1)$$

Chứng minh tương tự cũng có: $EC^2-EA^2=OC^2-OA^2\,(2)$; $FA^2-FB^2=OA^2-OB^2\,(3)$

Từ (1); (2); (3) ta có: $\left(DB^2-DC^2\right)+\left(EC^2-EA^2\right)+\left(FA^2-FB^2\right)=0$

b) Đảo :

Giả sử có : $\left(DB^2-DC^2\right)+\left(EC^2-EA^2\right)+\left(FA^2-FB^2\right)=0$

Gọi O là giao điểm của $(d_2);(d_3)$. Vẽ $OD'\perp BC$ tại D'. Cần chứng minh rằng $D'\equiv D$

Từ câu a) ta có: $\left(D'B^2-D'C^2\right)+\left(EC^2-EA^2\right)+\left(FA^2-FB^2\right)=0(**)$

Từ (*) và (**), ta có : $DB^2-DC^2=D'B^2-D'C^2 \Leftrightarrow BC(DB-DC)=BC(D'B-D'C)$

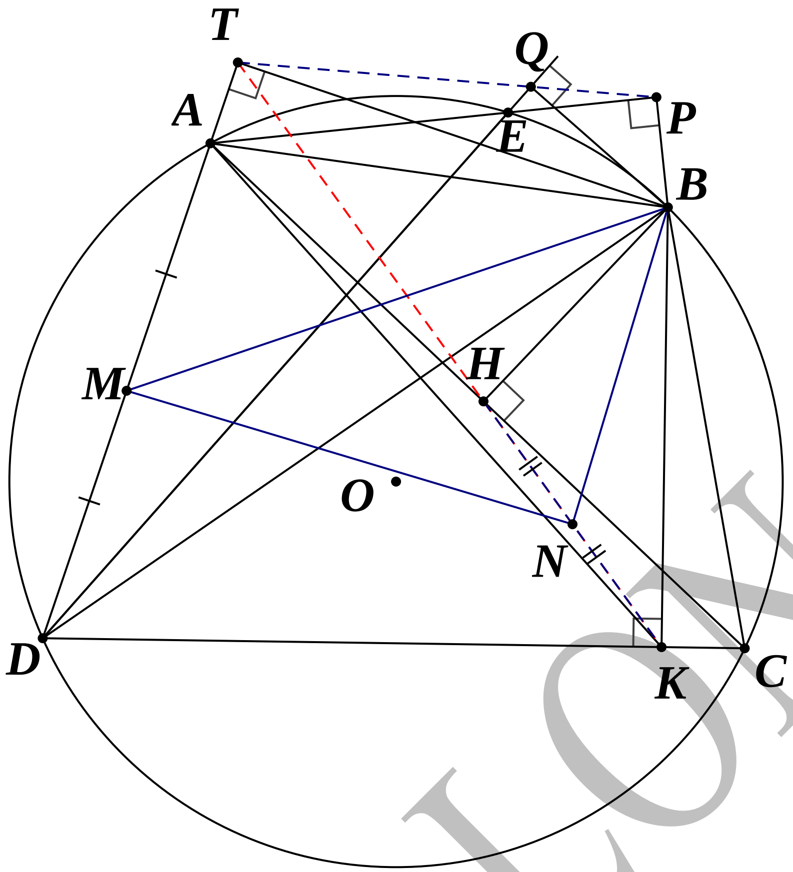
$\Leftrightarrow DB-DC=D'B-D'C \Leftrightarrow (DB+DC)-2DC=(D'B+D'C)-2D'C$

$\Leftrightarrow DC=D'C \Leftrightarrow D\equiv D'$

Vậy $(d_1);(d_2);(d_3)$ đồng quy khi và chỉ khi $\left(DB^2-DC^2\right)+\left(EC^2-EA^2\right)+\left(FA^2-FB^2\right)=0$

Câu V: **(2 điểm) (*)**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E là điểm trên cung nhỏ AB. Gọi H, K, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lean AC, CD, AE, DE. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, HK.



a) **Chứng minh rằng: AD, PQ, HK đồng quy.**

Vẽ $BT \perp AD$ tại T. Ta có: $BHC = BKC = 90^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác BHKC nội tiếp.

$\Rightarrow BHK + BCK = 180^0$ Mà $ATB + AHB = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Nên tứ giác ATBH nội tiếp. $\Rightarrow BHT = BAT$. Mà $BAT = BCK$ (Tứ giác ABCD nội tiếp)

Nên $BHT = BCK$ $\Rightarrow BHT + BHK = BCK + BHK = 180^0$ $\Rightarrow$ K, H, T thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta cũng có: K, H, T thẳng hàng.

Vậy các đường thẳng AD, PQ, HK đồng quy.

b) **Chứng minh rằng: $MN \perp NB$**

Tứ giác DTBK có: $DTB + DKB = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác DTBK nội tiếp

$\Rightarrow ADB = HKB$

Mặt khác: $\begin{cases} BAD + BCD = 180^0 \left(\text{Tứ giác ABCD nội tiếp}\right) \\ BHK + BCK = 180^0 \left(\text{Tứ giác BHKC nội tiếp}\right) \end{cases} \Rightarrow BAD = BHK$

Xét ΔBAM và ΔBHN, ta có:

$$\begin{cases} BAM = BHN \\ \dfrac{AB}{HB} = \dfrac{AM}{HN} \end{cases} \Rightarrow \Delta BAM \backsim \Delta BHN\left(c-g-c\right) \Rightarrow BMA = BNH$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BNMT nội tiếp. $\Rightarrow BNM + BTM = 180^0$

$\Rightarrow BNM = 180^0 - BTM = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Vậy $MN \perp NB$

<u>Câu VI:</u> (1 điểm)

Cho một đa giác đều 50 đỉnh. Người ta ghi lên mỗi đỉnh của đa giác 1 hoặc hai số. Biết rằng có 20 đỉnh ghi số 1, 30 đỉnh ghi số 2 và các số trên 3 đỉnh liên tiếp bất kỳ không đồng thời bằng nhau. Hãy tính tổng của tất các tích ba số trên 3 đỉnh liên tiếp của đa giác trên.

Có 50 đỉnh nên có 50 tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp. Vì 3 đỉnh liên tiếp bất kì các số không bằng nhau nên chỉ có hai loại tích:

Loại 1: ba số ở ba đỉnh liên tiếp chỉ có một số 2, tích ba số này bằng 2.

Loại 2: ba số ở ba đỉnh liên tiếp có hai số 2, tích ba số này bằng 4.

Gọi số tích loại 1 là x $\left(x \in N\right)$ thì số tích loại 2 là 50 – x. Mà số số 2 ở 50 tích có là: 30.3 = 90

Ta có phương trình: $x.1+\left(50-x\right).2=90 \Leftrightarrow x=10$

Vậy có 10 tích loại 1 và $40\left(=50-10\right)$ tích loại 2.

Do vậy tổng của tất cả các tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp của đa giác là : $2.10+4.40=180$

HẾT